

Funzioni continue e discontinue

Una funzione $f(x)$ si dice **continua** in un punto x_0 se si verifica che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè se il limite nel punto è uguale al valore che la funzione assume in esso. Se una funzione è continua in un punto, ivi il suo grafico non presenta interruzioni. Una funzione che non è continua in un punto si dice **discontinua**.

Quando la continuità esiste in tutti i punti di un intervallo, la funzione si dice **continua nell'intervallo**.

Le funzioni razionali intere sono continue $\forall x \in \mathbb{R}$. Ad esempio

$$y = 3x^2 + 3x - 2$$

è continua per ogni valore reale di x in quanto il limite per x tendente a qualunque numero reale coincide col valore della funzione in esso.

Le funzioni razionali fratte sono continue per qualsiasi valore reale eccetto i punti in cui si annulla il denominatore.

La funzione

$$y = \frac{x+3}{x-2}$$

non è continua in $x=2$.

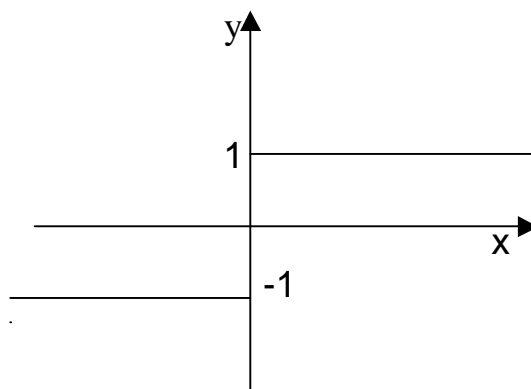
La funzione $y = \frac{|x|}{x}$ (vedi fig in basso) è discontinua in $x=0$, in questo punto non è definita e di conseguenza il limite non può essere uguale a $f(0)$ perché quest'ultimo valore non esiste.

Le discontinuità di una funzione possono essere di tre tipi: **I, II e III specie**.

Una funzione ha una discontinuità di I specie in un punto x_0 se ivi non è definita e i limiti destro e sinistro, per x che tende ad x_0 , esistono e sono diversi fra loro.

Deve quindi essere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$



Una funzione ha una discontinuità di II specie in un punto x_0 se, non è definita nel punto, il limite per x che tende a x_0 non esiste o uno almeno dei due limiti destro o sinistro vale ∞ .

La funzione

$$y = \frac{x+3}{x-2}$$

ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x=2$. Infatti non è definita in $x=2$ e il limite per x che tende a 2 sia da sinistra sia da destra è uguale a ∞ .
Si ha una discontinuità di III specie in un punto x_0 se in esso la funzione non è definita ma esistono i limiti destro e sinistro uguali fra loro. Cioè se :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

In questo caso la discontinuità è detta **eliminabile** in quanto al grafico della funzione manca soltanto il punto in corrispondenza di x_0 , la cui ordinata può essere sostituita col valore del limite.

La funzione

$$y = \frac{x^2-1}{x-1}$$

ha una discontinuità di III specie nel punto $x=1$. Infatti sia il limite sinistro sia quello destro, per x che tende a 1 sono uguali a 2.