Dette rispettivamente x, y e z le misure dei due cateti e dell'ipotenusa del triangolo rettangolo, se A è la sua area ed r è il raggio della circonferenza inscritta occorre che sia soddisfatto il seguente sistema:

$\begin{cases} x\cdot y = 2A \\ x^2+y^2=z^2 \\ r=\dfrac{2A}{x+y+z} \end{cases}$ che fornisce le seguenti soluzioni: $\begin{cases} x=\dfrac{2r+z-\sqrt{z^2-4rz-4r^2}}{2} \\ y=\dfrac{2r+z+\sqrt{z^2-4rz-4r^2}}{2} \\ A=r(r+z) \end{cases} \cup \begin{cases} x=\dfrac{2r+z+\sqrt{z^2-4rz-4r^2}}{2} \\ y=\dfrac{2r+z-\sqrt{z^2-4rz-4r^2}}{2} \\ A=r(r+z) \end{cases}$

da cui le limitazioni per il raggio della circonferenza inscritta al triangolo rettangolo di fissata ipotenusa: $0<r<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}z$.

Che il luogo descritto dall'incentro sia un arco di circonferenza deriva dalle seguenti considerazioni:

fissato in un qualsiasi triangolo un angolo che denotiamo con $B\widehat{A}C=2\alpha$, il lato ad esso opposto che indicheremo con $\overline{AB}=a$, un sistema di assi cartesiani con origine nel vertice B e semiasse positivo delle ascisse contenente a, posto $A\widehat{B}C=2t$, il luogo geometrico descritto dall'incentro al variare del parametro $t\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right[$, ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{a\cos(\alpha+t)\cos t}{\cos\alpha} \\ x(t)=\dfrac{a\cos(\alpha+t)\sin t}{\cos\alpha} \end{cases} \text{ con } t\in\left]0;\frac{\pi}{2}-\alpha\right[$$

da cui tenuto conto che $\begin{cases} \tan t=\dfrac{y}{x} \\ x+y=\dfrac{a\cos(\alpha+t)(\cos t+\sin t)}{\cos\alpha} \end{cases}$ con $t\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right[$

Si ottiene:

l'arco di circonferenza delimitato dagli estremi $(0;0)$ e $(a;0)$ percorso nel verso antiorario della circonferenza di equazione:

$$x^2+y^2-ax+ay\tan\alpha=0$$

Nel nostro caso $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ e il triangolo rettangolo di fissata ipotenusa a e raggio inscritto r deve avere l'incentro appartenente alla circonferenza di centro $\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2}\right)$ e raggio $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Dopo tali considerazioni di carattere analitico la costruzione del triangolo rettangolo con gli strumenti di riga e compasso dovrebbe essere immediata. Si allegano le costruzioni del triangolo rettangolo e del luogo geometrico descritto dall'incentro.